Classes de Steinitz d'extensions galoisiennes non ramifiées

Ayoub AL UARTASSI

Université Polytechnique et INSA Hauts-de-France, Ceramaths, F-59313 Valenciennes, France
Université Moulay Ismaïl, Meknès, Maroc
E-mail : ayoub.aluartassi@uphf.fr

Résumé

Soient K un corps de nombres et Cl_K son groupe de classes. Soit Γ un groupe fini. On désigne par $R_{nr}(K,\Gamma)$ le sous-ensemble de Cl_K formé par les classes réalisables comme classes de Steinitz d'extensions galoisiennes de K, non ramifiées aux places finies de K et ayant un groupe de Galois isomorphe à Γ. Si Γ est abélien et le nombre de classes de K au sens restreint est premier avec l'ordre de Γ, alors $R_{nr}(K,\Gamma) = \varnothing$. Dans cet exposé, pour Γ quelconque on considère l'ensemble $R'_{nr}(K,\Gamma) := \{1\} \cup R_{nr}(K,\Gamma)$. On prouve que $R'_{nr}(K,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $Cl_{K,2} := \{c \in Cl_K | c^2 = 1\}$; de plus il est égal à $Cl_{K,2}$ sous une certaine hypothèse sur K. En utilisant ce résultat, on montre que $R'_{nr}(K,\Gamma)$ est un sous-groupe de $R'_{nr}(K,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ si Γ est d'ordre impair, ou bien a un 2-sous-groupe de Sylow non cyclique (par exemple Γ un 2-groupe non abélien, $\Gamma = S_n$ ou A_n, avec $n \geqslant 4$), ou bien a un 2-sous-groupe de Sylow cyclique et normal (par exemple Γ nilpotent d'ordre pair).

Abstract

Let K be a number field and Cl_K its class group. Let Γ be a finite group. We denote by $R_{nr}(K,\Gamma)$ the subset of Cl_K formed by the classes which are realizable as Steinitz classes of Galois extensions of K, unramified at the finite places of K and having a Galois group isomorphic to Γ. If Γ is abelian and the narrow class number of K is prime to the order of Γ, then $R_{nr}(K,\Gamma) = \varnothing$. In the present talk, for any Γ we consider the set $R'_{nr}(K,\Gamma) := \{1\} \cup R_{nr}(K,\Gamma)$. We prove that $R'_{nr}(K,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ is a subgroup of $Cl_{K,2} := \{c \in Cl_K | c^2 = 1\}$; furthermore, it is equal to $Cl_{K,2}$ under a certain assumption on K. Using this result we show that $R'_{nr}(K,\Gamma)$ is a subgroup of $R'_{nr}(K,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ if Γ either has odd order, or has a noncyclic 2-Sylow subgroup (for instance Γ a nonabelian 2-group, $\Gamma = S_n$ or A_n, with $n \geqslant 4$), or has a normal cyclic 2-Sylow subgroup (for instance Γ nilpotent having even order).